

Barem clasa a XII-a (OLM 2017-etapa locală)

Subiectul I. (7 puncte)

Aplicând teorema de medie funcției $g(x) = \frac{1}{1+\ln^2 f(x)}$ continuă pe $[a, b]$

$$\Rightarrow (\exists) c \in [a, b] \text{ astfel încât } \int_a^b \frac{1}{1+\ln^2 f(x)} dx = \frac{b-a}{1+\ln^2 f(c)}. \quad (2 \text{ puncte})$$

Funcția f verifică condițiile teoremei lui Lagrange $\Rightarrow (\exists) x_0 \in (a, b)$ astfel încât

$$f(b) - f(a) = (b - a)f'(x_0). \quad (2 \text{ puncte})$$

$$\text{Deci } \int_a^b \frac{1}{1+\ln^2 f(x)} dx = \frac{f(b)-f(a)}{[1+\ln^2 f(c)]f'(x_0)} = \frac{e-1}{[1+\ln^2 f(c)]f'(x_0)} \leq \frac{e-1}{f'(x_0)}. \quad (2 \text{ puncte})$$

S-a folosit faptul că f este strict crescătoare și $1 + \ln^2 f(c) \geq 1$, $c \in [a, b]$. (1 punct)

Subiectul II. (7 puncte)

$$a) \quad (m,n)=1 \rightarrow \exists a, b \in \mathbb{Z} \text{ a.î. } ma + nb = 1 \quad (1 \text{ punct})$$

$$xy = (xy)^{ma+nb} = ((xy)^m)^a ((xy)^n)^b = ((yx)^m)^a ((yx)^n)^b = (yx)^{ma+nb} = yx \quad (2 \text{ puncte})$$

$$b) \quad b^{2n} = b^n b^n = (aba^{-1})(aba^{-1}) = ab^2 a^{-1} \quad (1 \text{ punct})$$

$$b^{3n} = (ab^2 a^{-1})(aba^{-1}) = ab^3 a^{-1} \quad (1 \text{ punct})$$

$$b^{n^2} = ab^n a^{-1} = a(aba^{-1})a^{-1} = a^2 b a^{-2} = b \quad (1 \text{ punct})$$

$$b^{n^2-1} = e \quad (1 \text{ punct})$$

Subiectul III. (7 puncte)

$$\text{Relația } G'(x) = g(x) \text{ conduce la } \frac{f'(x) \cdot (3 + \cos x) + \sin x \cdot f(x)}{(3 + \cos x)^2} = f(x) \cdot 2 \cdot \sin x \cdot (\cos x + 3) \quad (2 \text{ puncte})$$

$$\text{și prin urmare rezultă } \frac{f'(x)}{f(x)} = 2 \cdot (\cos x + 3)^2 \cdot \sin x - \frac{\sin x}{3 + \cos x}. \quad (2 \text{ puncte})$$

$$\text{Avem } \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = 2 \cdot \int (3 + \cos x)^2 \cdot \sin x dx - \int \frac{\sin x}{3 + \cos x} dx \text{ și rezultă} \quad (1 \text{ punct})$$

$$\ln f(x) = -\frac{2}{3} \cdot (3 + \cos x)^3 + \ln(3 + \cos x) + \ln|C|, \text{ adică } f(x) = |C| \cdot e^{-\frac{2}{3}(3+\cos x)^3} \cdot (3 + \cos x). \quad (2 \text{ puncte})$$

Subiectul IV. (7 puncte)

Funcția $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definită prin $f(t) = e^{t^2}$ fiind continuă, admite primitive pe \mathbb{R} . Fie $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ o primitivă a funcției f . Prin urmare F este derivabilă și $F'(t) = e^{t^2}$, oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$. **(2 puncte)**

Din continuitatea funcției f , rezultă că ea este integrabilă pe $[0, x^2]$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Prin urmare, avem că:

$$\int_0^{x^2} f(t) dt = F(x^2) - F(0), \forall x \in \mathbb{R}. \quad \textbf{(2 puncte)}$$

Funcția F fiind continuă $\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} F(x) = F(0)$. Cum $\lim_{x \rightarrow 0} \sin^2 x = 0$, avem că:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_0^{x^2} f(t) dt}{\sin^2 x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{F(x^2) - F(0)}{\sin^2 x} \stackrel{\left(\frac{0}{0}\right)}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2xF'(x^2)}{2\sin x \cos x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xe^{x^4}}{\sin x \cos x} = 1. \quad \textbf{(3 puncte)}$$